УДК 517.929

© **Е.В. Кукушкина**

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана линейная однородная система функционально-разностных уравнений

$$x(t)=\int_{-r}^{0} d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\,x(t+\vartheta), \quad t>t_0, \tag{1}$$

где $x:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, матричная функция $\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-r,0]$, $\eta(t,0)=0$. Пусть также отображение $t\to\eta(t,-r)$ непрерывно на числовой оси; для любого $\tau\in\mathbb{R}$ отображение $t\to\int_{t-r}^{\tau}\eta(t,s-t)\,ds$ непрерывно на любом отрезке числовой оси, и $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\Delta,0]}(t,z)\to 0$ при $\Delta\to 0$ равномерно по t на любом конечном отрезке числовой оси.

При сделанных предположениях начальная задача Коши с начальным моментом времени $t_0\in\mathbb{R}$ и начальной функцией $\varphi\in\mathbb{C}([t_0-r,t_0],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\varphi(t_0)=\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(t_0,\vartheta)\,\varphi(t_0+\vartheta)$, имеет единственное непрерывное решение $x(t,t_0,\varphi)$, $t\geqslant t_0-r$, (см. [1]). Обозначим $\varphi_{t_0}(\vartheta)=\varphi(t_0+\vartheta)$, $\vartheta\in[-r,0]$. Тогда

$$\varphi_{t_0}\in\widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi_{t_0}:\ \varphi_{t_0}\in\mathbb{C}([-r,0],\mathbb{R}^n),\quad \varphi_{t_0}(0)=\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(t_0,\vartheta)\,\varphi_{t_0}(\vartheta)\right\}.$$

Решение системы (1) $x(t,t_0,\varphi)$ при $t>t_0$ с начальной функцией $x(t_0+\vartheta,t_0,\varphi)=\varphi_{t_0}(\vartheta)$ ($-r\leqslant\vartheta\leqslant 0$) допускает представление [1]. В качестве элемента решения будем рассматривать его отрезок $x_t(\vartheta,t_0,\varphi_{t_0})=x(t+\vartheta,t_0,\varphi_{t_0})$, $\vartheta\in[-r,0]$, $t\geqslant t_0$. Этот элемент

$$x_t\in\widetilde{\mathbb{C}}_t([-r,0],\mathbb{R}^n)=\left\{x_t:\ x_t\in\mathbb{C}([-r,0],\mathbb{R}^n),\quad x_t(0)=\int_{-r}^{0}d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)\,x_t(\vartheta)\right\}$$

и допускает представления:

при $t\in[t_0,t_0+r]$

$$x_t(\vartheta,t_0,\varphi_{t_0})=\left\{\begin{array}{c}\varphi_{t_0}(t-t_0+\vartheta),\quad \vartheta\in[-r,t_0-t],\\ \int_{-r}^{0}dT(t+\vartheta,t_0+\xi,t_0)\,\varphi_{t_0}(\xi)+\\ +\left(V(t+\vartheta,t_0)-T(t+\vartheta,t_0,t_0)+I_n\right)\varphi_{t_0}(0),\vartheta\in(t_0-t,0],\end{array}\right.$$

при $t>t_0+r$

$$x_t(\vartheta,t_0,\varphi_{t_0})=\int_{-r}^{0}dT(t+\vartheta,t_0+\xi,t_0)\,\varphi_{t_0}(\xi)+$$
$$+\left(V(t+\vartheta,t_0)-T(t+\vartheta,t_0,t_0)+I_n\right)\varphi_{t_0}(0),\quad \vartheta\in[-r,0].$$

Элемент $x_t(\cdot,t_0,\varphi_{t_0})$ можно рассматривать как образ элемента φ_{t_0} при некотором отображении:

$$x_t(\vartheta,t_0,\varphi_{t_0})=\left(\mathbb{T}(t,t_0)\,\varphi_{t_0}\right)(\vartheta),\quad \vartheta\in[-r,0],\quad t\geqslant t_0,$$

где $\mathbb{T}(t,t_0):\ \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\widetilde{\mathbb{C}}_t([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Оператор $\mathbb{T}(t,t_0)$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathbb{T}(t_0,t_0)=I$, где I – тождественный оператор;

2) $\mathbb{T}(t,t_0)=\mathbb{T}(t,t_1)\,\mathbb{T}(t_1,t_0)$, $t\geqslant t_1\geqslant t_0$.

Справедливость свойства 2) следует из равенства $x(t+\vartheta,t_1,x(t_1+\vartheta,t_0,\varphi))=(\mathbb{T}(t,t_0)\,\varphi_{t_0})(\vartheta)=(\mathbb{T}(t,t_1)\,x_{t_1})(\vartheta)=(\mathbb{T}(t,t_1)\,\mathbb{T}(t_1,t_0)\,\varphi_{t_0})(\vartheta)$, $t\geqslant t_1\geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 1. Нулевое решение системы (1) называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любой начальной функции $\varphi_{t_0}\in\widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|\varphi_{t_0}\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}}<\delta(\varepsilon)$ имеет место $\|x_t(\cdot,t_0,\varphi_{t_0})\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_t}<\varepsilon$ при $t>t_0$.

О п р е д е л е н и е 2. Нулевое решение системы (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и существует такое $\Delta > 0$, что для любой начальной функции $\varphi_{t_0} \in \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|\varphi_{t_0}\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}} < \Delta$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_t(\cdot,t_0,\varphi_{t_0})\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_t} = 0\,.$$

О п р е д е л е н и е 3. Нулевое решение системы (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если справедлива оценка

$$\|x_t(\cdot,t_0,\varphi_{t_0})\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_t} \leqslant K\,\|\varphi_{t_0}\|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}} e^{-\alpha t}\,, \quad t > t_0\,, \quad K,\alpha > 0.$$

В силу линейности системы (1) из устойчивости (асимптотической, экспоненциальной устойчивости) нулевого решения следует соответственно устойчивость (асимптотическая, экспоненциальная устойчивость) любого решения системы (1). Поэтому будем говорить об устойчивости (асимптотической, экспоненциальной устойчивости) системы (1).

Т е о р е м а 1. *Для устойчивости системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{t>t_0} \|\mathbb{T}(t,t_0)\| < \infty.$$

Для асимптотической устойчивости системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbb{T}(t,t_0)\| = 0.$$

Для экспоненциальной устойчивости системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа* K *и* α, *такие что*

$$\|\mathbb{T}(t,t_0)\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

С л е д с т в и е 1. *Следующие условия достаточны для устойчивости системы* (1)

$$\sup_{t>t_0} \operatorname*{var}_{\xi\in[t_0-r,t_0]} T(t,\xi,t_0) < \infty, \quad \sup_{t>t_0} V(t,t_0) < \infty, \quad \sup_{t>t_0} T(t,t_0,t_0) < \infty.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть существует такое* $t_1 > t_0$, *что* $\sup\limits_{t\geqslant t_1} \operatorname*{var}\limits_{\vartheta\in[-r,0]} \eta(t,\vartheta) < 1$. *Тогда система* (1) *экспоненциально устойчива.*

Пусть дополнительно выполнены следующие условия: $\det P(t) \neq 0$, $t \in\mathbb{R}$; отображение $t \to P^{-1}(t)$ непрерывно на числовой оси, где $P(t) = \eta(t,-r+0) - \eta(t,-r)$, $t \in\mathbb{R}$, и $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\Delta,0]} (\eta(t,-r-z) - \eta(t,-r+0)) \to 0$ при $\Delta \to 0$ равномерно по t на любом конечном отрезке числовой оси. Тогда элемент $x_t(\cdot,t_0,\varphi_{t_0})$ можно рассматривать как образ элемента φ_{t_0} при некотором отображении $\mathbb{T}(t,t_0)$ на всей числовой оси:

$$x_t(\vartheta,t_0,\varphi_{t_0}) = \mathbb{T}(t,t_0)\,\varphi_{t_0}(\vartheta)\,, \quad \vartheta \in [-r,0]\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{T}(t,t_0):\ \widetilde{\mathbb{C}}_{t_0}([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \widetilde{\mathbb{C}}_t([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Оператор $\mathbb{T}(t,t_0)$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathbb{T}(t_0,t_0) = I$, где I – тождественный оператор;
2) $\mathbb{T}(t,t_0) = \mathbb{T}(t,t_1)\,\mathbb{T}(t_1,t_0)$, $t,t_1,t_0 \in \mathbb{R}$;

Т е о р е м а 3. *Устойчивость, асимптотическая и экспоненциальная устойчивости системы* (1) *не зависят от начального момента.*

Список литературы

1. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Общий вид решения нестационарной системы функционально-разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2003. N 7. С.27–34.

Кукушкина Евгения Викторовна
Уральский государственный технический ун-т – УПИ,
Россия, Екатеринбург
e-mail: kukushkiny@r66.ru